Kräfte- und Beschleunigungsdiagramme

von Dr. Ing. Frank Owen, Fachhochschule München

Bearbeitsdatum: 18 März 2007

Thema dieses Skripts ist: Wie leitet man die Bewegungsgleichungen eines starren Einzel-Körper-Systems her? Erforderliche Hilfsmittel dafür sind bestimmte Diagramme, die die Kräfte auf den Körper zeigen und dazu die entsprechenden Beschleunigungen, die der Körper erfährt.

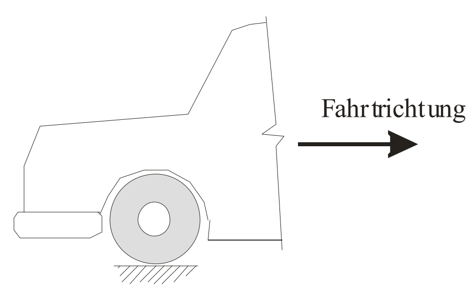
Diese beiden Größen werden entweder in einem einzigen Diagramm oder in zwei verschiedenen Diagrammen dargestellt. Das erste wird das „D'Alembert'sche Diagramm" genannt. Die letzteren zwei Diagramme werden das „Frei-Körper-Diagramm" und das „Masse-Beschleunigung-Diagramm" genannt. Aus den letzten beiden Diagrammen kann man immer das erste Diagramm ableiten.

Man hat die Wahl, welche Methode man benutzen will. Es ist meine nachdrückliche Empfehlung, die 2-Diagramm-Methode zu wählen. Kräfte und Beschleunigungen sind zwar verschiedene physikalische Größen, die aber durch das Newton'sche Gesetz ($F = m \cdot a$) verknüpft sind. Im Folgenden beschreibe ich die 2-Diagramm-Methode. Danach zeige ich, wie man das D'Alembert'sche Diagramm aus den beiden ableiten kann.

Frei-Körper-Diagramm

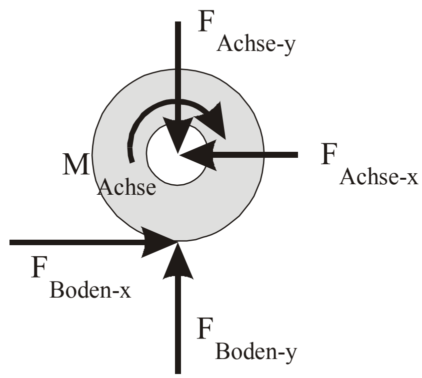
Alle Körper haben eine Umgebung, mit der sie reagieren. Mechanisch sind die Reaktionen Kräfte und Momente. Ein Hauptzweck des Frei-Körper-Diagramms (FKD) ist es, diese Wechselwirkung zu zeigen. Dazu schneidet man den Körper ganz aus seiner Umgebung heraus (Schnittprinzip). D.h., in diesem Diagramm erscheint kein Boden oder andere Unterstützungen des Rades, wie z.B. die Hinterachse, nur der Körper. Wo man eine Unterstützung wegschneidet, ersetzt man diese entweder durch eine Kraft oder ein Moment (sogenanntes Freischneiden des Körpers).

Als Beispiel betrachten wir das angetriebene Hinterrad eines Autos:



Das Rad trägt anteilig das Gewicht der Karosserie des Autos. Es überträgt weiterhin das antreibende Moment der Radachse zum Boden. Also muss man gedanklich die Radachse und den Boden herausschneiden und durch die auf das Rad einwirkende Kräfte und Momente ersetzen. Der Boden kann nur Kräfte übertragen, weil der Reibschluß zwischen Rad und Boden kein Moment übertragen kann. Aber die Radachse kann beides, d.h. eine Kraft und ein Moment übertragen.

Das FKD des Rads sieht daher so aus:



Wo immer man einen Teil der Umgebung wegschneidet, stellt man sich zuerst die Frage: was für Kräfte/Momente kann diese Umgebung übertragen, durch welche Kräfte / Momente muss die weggeschnittene Unterstützung ersetzt werden?

Anmerkungen zu diesem Beispiel:

1. Die Kräfte und das Moment sind diejenigen, die von der weggeschnittenen Umgebung auf das Rad einwirken, nicht die Kräfte und Momente des Rads auf die Umgebung (drittes Gesetz Newtons).

2. Das Moment der Radachse wirkt im Uhrzeigersinn auf das Rad.

3. Dieses Moment erzeugt am Außenumfang des Rades eine horizontale Kraft am Boden. Diese Radumfangskraft wirkt rückwarts auf den Boden. Dies ist die treibende Kraft des Rads auf den Boden (Reibkraft), und ist die Kraft des betrachteten Körpers auf seine Umgebung. Für diese Analyse braucht man jedoch die von außen auf das Rad einwirkende, der Reibkraft entgegen wirkende Kraft.

4. Diese Kraft $F_{Boden-x}$ bewegt das Auto vorwärts.

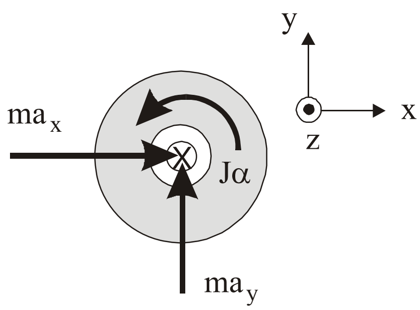
5. Diese Kraft wird durch das Rad auf die Achse übertragen. Die Achse stößt gegen die Karosserie des Autos. Die entsprechende Kraft des Autos auf die Achse und damit auf das Rad ist die Kraft der Umgebung auf dem Körper $F_{Achse-x}$.

6. Gleichermaßen wirkt das Gewicht des Autos über die Achse auf das Rad als vertikale Kraft $F_{Achse-y}$. Die dieser entgegen wirkende Kraft des Bodens auf das Rad ist $F_{Boden-y}$. Beide Kräfte wirken von außen auf das Rad.

Masse-Beschleunigungs-Diagramm

Das Masse-Beschleunigungs-Diagramm zeigt denselben Körper, aus der Umgebung freigeschnitten. Die Regeln für seine Erstellung sind einfach. Man errichtet ein angepasstes Koordinatensystem. Anschließend zeichnet man den Schwerpunkt des

Körpers ein. Dann zeichnet man alle Masse-Beschleunigungs-Vektoren ein. Zum Beispiel:



Das Symbol ⊗ bezeichnet den Schwerpunkt. Am Schwerpunkt zeichnet man m·a-Vektoren in die positiven Richtungen. Falls der Körper keine Punktmasse ist, d.h. er hat eine räumliche Ausdehnung mit einer Massenverteilung, dann leistet er Widerstand gegen Drehungen. Man zeichnet dazu ein positives Moment ein, in diesem Fall um die z-Achse.

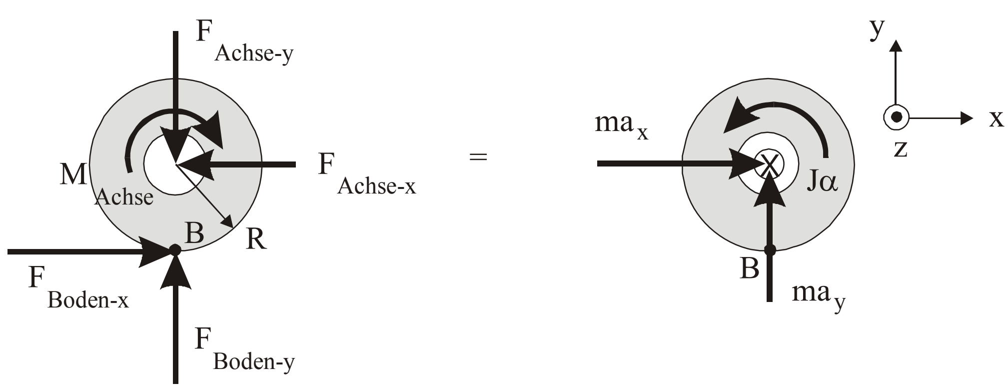
Zusammenführen der beiden bisherigen Überlegungen

Diese Überlegung basiert auf dem zweiten Gesetz Newtons:

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

Die Kräfte auf der linken Seite ergeben sich aus dem FKD. Die m·a-Vektoren ergeben sich aus dem MBD. Damit ergibt sich folgende Darstellung (Diagramme und Gleichungen):

FKD = MBD



$\xrightarrow{+} \Sigma F_x$:	$F_{Boden-x} - F_{Achse-x}$	$=$	$m \cdot a_x$
$+\uparrow \Sigma F_y$:	$F_{Boden-y} - F_{Achse-y}$	$=$	$m \cdot a_y$
$\circlearrowleft + \Sigma M_B$:	$-M_{Achse} - F_{Achse-x} \cdot R$	$=$	$J \cdot \alpha - m \cdot a_x \cdot R$

Anmerkungen:

1. Diese Vorgehensweise ist sehr anschaulich. Danach vorzugehen bietet sich auch an, wenn man schon Erfahrungen auf diesem Gebiet der Mechanik hat.

2. Die Methode stellt auf eine grafische Weise $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ dar. Wichtig ist, dass die beiden obigen Betrachtungen einmal nur die Kräfte / Momente und einmal nur die Beschleunigungen beinhalten. Wenn man dieses Gesetz auf eine quasi starre Struktur anwendet, sind die beiden Betrachtungen gleichwertig und man kann schreiben: FKD = MBD. Bemerken Sie das Gleichheitszeichen, es schafft die Voraussetzung für unsere Betrachtungen.

3. In den Gleichungen ergeben sich die Terme der linken Seiten aus dem FKD, die Terme der rechten Seiten aus dem MBD.

4. Die Vektoren auf der rechten Seite werden gleich wie Kräfte und Momente behandelt.

5. In dem statischen Fall bleibt der Körper still oder bleibt die Geschwindigkeit und Richtung konstant ohne Drehung. Also sind alle Beschleunigungen gleich 0. Es gibt keine Vektoren im MBD und die rechte Seite jeder Gleichung ist gleich 0. Dann sind alle statische Kräfte und Momente in Gleichgewicht.

6. Weil das Rad keine Punktmasse ist, hat es ein Trägheitsmoment J. Die entsprechende Beschleunigung ist α. Die Drehbeschleunigung α hat die Einheit rad/sek^2. Ein Moment hat die Einheit N · m. Um die physikalishe Übereinstimmung herzustellen, ergibt sich für J als Einheit kg · m^2. Dann hat $J \cdot \alpha$ die Einheit
kg · m^2/sek^2 = (kg · m/sek^2) · m = N · m.

7. Obwohl es nicht nötig ist, die Definition der positiven Richtungen links von den Gleichungen anzugeben, ist dies von Nutzen. Das vereinfacht die Überprüfung der Gleichungen.

8. Die Wahl von positiven Richtungen ist beliebig. D.h., man könnte irgendwelche Richtung als positive definieren. Aber um Verwirrung zu vermeiden, wähle ich immer die positiven Richtungen in Richtung der Koordinatenachsen. Es empfiehlt sich, die einmal festgelegten Definitionen beizubehalten.

Das D'Alembert'sche Prinzip und das D'Alembert'sche Diagramm

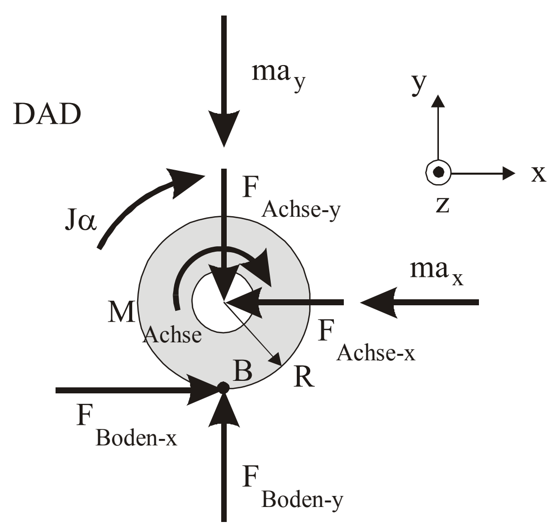
Wie schon gesagt, kann man die D'Alembert'sche Methode aus dem vorigen Verfahren herleiten. Das Prinzip D'Alemberts ist eine Variante des zweiten Gesetzes Newtons. Statt

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

wird geschrieben

$$\underline{F} - m \cdot \underline{a} = \underline{0}$$

Somit wird das dynamische Problem ein statisches Problem. Wegen des negativen Vorzeichens sind alle $m \cdot \underline{a}$-Vektoren umgekehrt. Weil alle von Null verschiedene Terme auf der linken Seite erscheinen, reicht ein einziges Diagramm, das D'Alembert'sche Diagramm (DAD). Das vorige Beispiel hat das nachstehende DAD:



Das DAD schließt nicht nur echte Kräfte und Momente ein, sondern auch D'Alembert'sche „Kräfte" und „Momente". Die entsprechenden D'Alambert'schen Gleichungen sind:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 = F_{Boden\text{-}x} - F_{Achse\text{-}x} - m \bullet a_x$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 = F_{Boden\text{-}y} - F_{Achse\text{-}y} - m \bullet a_y$$

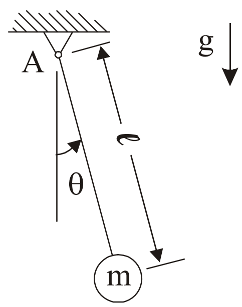
$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_B = 0 = -M_{Achse} - F_{Achse\text{-}x} \bullet R - J \bullet \alpha + m \bullet a_x \bullet R$$

Das Problem wird gleich einem statischen Problem behandelt. Bezüglich der D’Alembert’schen „Kräfte“ und „Momente“, ist der Körper quasi in einem statischen Gleichgewicht.

Es ist einfach, das DAD ausgehend vom FKD und vom MBD zu erstellen. Oft ist es aber schwierig, das DAD ohne diese beiden Diagramme zu erstellen. Kräfte und Beschleunigungen können sonst leicht verwechselt werden, und es besteht die Gefahr, die umgekehrten Richtungen der Beschleunigungen nicht zu beachten. Ich bin der Meinung, dass ein Vorgehen nach der FKD/MBD-Methode weniger Verwirrung stiftet. Sie ist eine direkte Anwendung des zweiten Gesetzes Newtons. Die D’ Alembert’sche Methode ist lediglich eine Variante von Newtons Gesetz. Ich sehe keinen Vorteil und einige Nachteile, die D' Alambert'sche Methode zu benutzen.

Beispiel – mathematisches Pendel

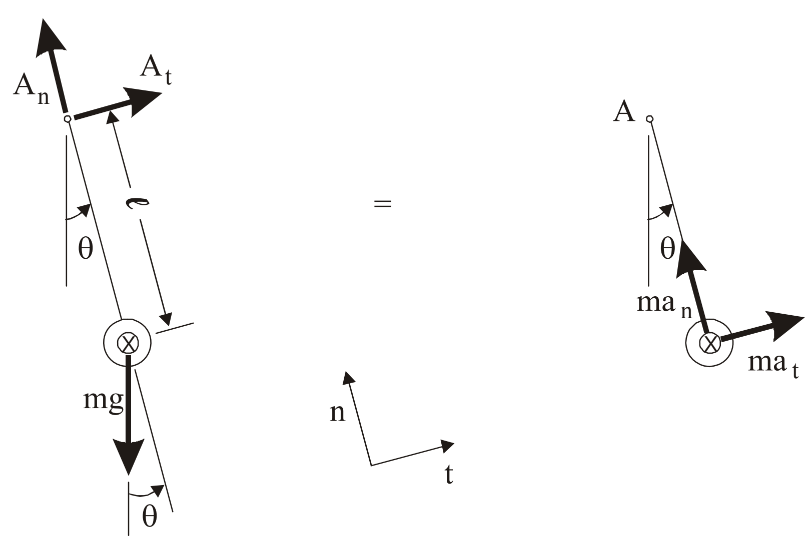
Ein bekanntes einfaches System ist das mathematische Pendel:



Die Variable von Interesse ist der Winkel θ. Die Masse wird als Punktmasse vorausgesetzt, der Pendelarm als masselos (Ersatzmodell).

Nach der Newton’schen Methode sind das FKD und das MBD:

FKD = MBD



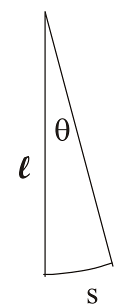
Owen – FKD/MBD-Methode zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen

Der Körper besteht aus der Punktmasse und dem masselosen Pendelarm. Die einzigen Kräfte auf die Punktmasse sind daher das Gewicht der Punktmasse und die Reaktionkräfte am Lager oben. Es ist nützlich, die Lagerkräfte in n/t-Komponenten zu zerlegen. Weil die Pendelmasse als eine Punktmasse betrachtet wird, gibt es kein J•α-Moment in dem MBD. Die Masse gilt als konzentriert im Schwerpunkt, so dass sie keinen Widerstand gegen Drehung leistet.

Die Gleichung für die Schwingungsbewegung ($\theta = \theta(t)$) ergibt sich aus der Summe der Momente um Punkte A:

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M_A: \quad -mg\ell\sin\theta = ma_t\ell$$

Für kleine Winkel gilt:



$$\sin\theta = s/\boldsymbol{\ell} \quad \text{und} \quad \sin\theta \approx \theta$$

Somit

$$s = \ell \cdot \sin\theta \approx \ell \cdot \theta$$

$$a_t = \ddot{s} = \ell \cdot \ddot{\theta}$$

Also

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

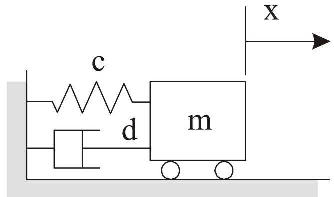
Eine wichtige Folge dieser Differentialgleichung ist, dass die Pendelmasse keinen Einfluß bezüglich der Schwingungen des Pendels hat.

Für kleine Amplituden der Schwingungen, ist $\sin\theta \approx \theta$. Die Gleichung vereinfacht sich zu:

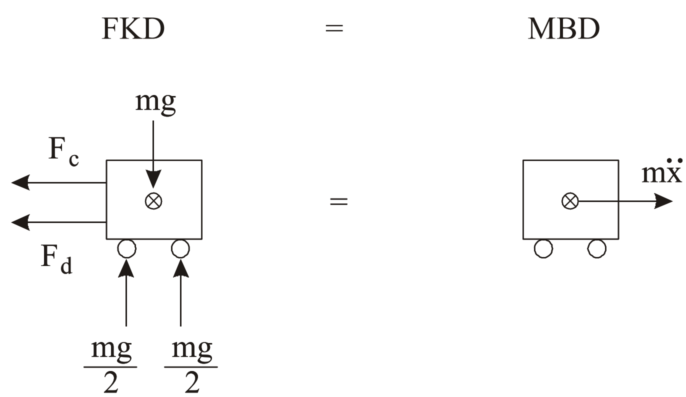
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \qquad \text{(homogene Differentialgleichung)}$$

Beispiel – einfaches Feder-Masse-Dämpfer-System (mdc-System)

In der Schwingungstechnik ist das Feder-Masse-Dämpfer-System (mdc-System) ein Standard-Ersatz-Modell:



Der grafische Teil der FKD / MBD-Methode ergibt sich zu:



Weil es keine vertikale Bewegung gibt, gibt es keinen $m \cdot a_y$ Vektor im MBD. Das y-Problem ist bloß statisch. Also trägt jedes Rad eine Hälfte der vertikalen Gewichtsbelastung.

Man ersetzt die Feder und den Dämpfer durch entsprechende Kräfte. Die Richtungen werden so bestimmt: man gibt der Masse eine positive Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung, in diesem Fall nach rechts. Die Auslenkung bewirkt eine Federkraft nach links. Die Geschwindigkeit bewirkt eine Dämpferkraft ebenso nach links. Die positive Beschleunigung ist nach rechts gerichtet, wie im MBD gezeigt wird. Es ist meiner Meinung nach wichtig, im FKD nur F_c und F_d zu schreiben, d.h. dass man die Ausdrücke oder Beziehungen zur Koordinate x mit ihren Ableitungen nicht zu dieser Zeit auszuwerten versucht. Es ist wichtig, kleine Schritte zu machen, um eine einfache Struktur zu bewahren. Es ist auch einfacher nach der Berechnung, im Fall eines Fehlers, die gesamte Arbeit zu überprüfen.

Owen – FKD/MBD-Methode zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen

Die wesentliche Gleichung in diesem Fall betrifft das Gleichgewicht der Kräfte und Beschleunigungen in x-Richtung:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x : \quad -F_c - F_d = m\ddot{x}$$

$F_c = cx$ (Hooke'sche Federkraft)

$F_d = d\dot{x}$ (geschwindigkeitsproportionale Dämpfung)

$$-cx - d\dot{x} = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0$$

Anmerkungen:

1. Die Vorzeichen von F_c und F_d ergeben sich aus dem FKD und der gewählten Vorzeichenkonvention.

2. Wie gesagt werden die Ausdrücke für F_c und F_d in einem separaten Schritt ausgearbeitet.

3. Um diese Ausdrücke auszuarbeiten, muss man sich z.B. fragen, ob man mit positivem x für F_c die Richtung im FKD richtig angegeben hat? Oder hat F_d für die positive Geschwindigkeit die richtige Richtung in der Skizze? Lassen sich beide mit ja beantworten? Positiv im Sinn dieser Gleichungen bedeutet, dass die Richtung der skizzierten Kraft korrekt ist.

4. Diese Methode ist vor allem konsistent. Es gibt andere Möglichkeiten. Z.B. kann man negative Auslenkungen und Geschwindigkeiten einsetzen und sorgfältig die entsprechenden Ausdrücke für F_c und F_d ausarbeiten? Ein solches Vorgehen stiftet allenfalls Verwirrung. Warum sollte man also nicht den einfacheren Weg gehen?

Weitere Anmerkungen und Hinweise

1. Die FKD/MBD sollten mit möglichst wenig Aufwand zu erstellen sein, um die Wirkungen der Kräfte, Momente und Beschleunigungen zu verdeutlichen.

2. Oft ist die Momenten-Gleichung die nützlichste. Durch eine geschickte Auswahl des Drehpunkts kann man unbekannte Kräfte aus der Gleichung ausschließen.

3. Versuchen Sie nicht, die Details einer gezeichneten Kraft oder eines gezeichneten Moments auf den FKD/MBD-Skizzen unmittelbar sofort auszuarbeiten. Z.B. ist vielleicht $a_x = R\ddot{\theta}$ in einer Drehbewegungsaufgabe. Statt diese Größe und die Richtungen sofort auszuarbeiten, soll man nur einen a_x-Vektor in die Skizze zeichnen. Später, in Ruhe, kann man dann die Details ausarbeiten. Dann sind die

Schritte kleiner und leichter überschaubar. Dieser Vorschlag gilt nicht nur für Anfänger sondern auch für Profis. Auf diese Weise gelöst ist die Arbeit leichter nachprüfbar.

4. In der MBD-Skizze zeichnet man in den Schwerpunkt die $m \cdot a$-Vektoren und die $J \cdot \alpha$-Vektoren. Außerhalb des Schwerpunkts werden keine Vektoren gezeichnet. Z.B. soll man keine Beschleunigung am Drehpunkt eines Pendels zeichnen. Die Masse liegt am Ende des Pendels. Man zeichnet alle Beschleunigungen dort ein.

5. Verwenden Sie nicht eine die Aufgabe begleitende Orginalzeichnung, um die FKD/MBD-Skizzen anzufertigen, sondern eigene Skizzen. Ein wichtiger Schritt dieser Methode ist das Freischneiden, die Trennung des Objekts aus seiner Umgebung. Ohne eine separate Skizze zu machen, wird diese Tätigkeit nicht gelingen.

6. Da das Gesamtsystem und auch alle Teilsysteme (Teilobjekte) jeweils im Gleichgewicht stehen, kann man jedes beliebige Teilsystem berechnen. Es muss jedoch stets klar sein, um welches Teilsystem es sich dabei handelt. Man muss deshalb ein Teilobjekt so darstellen, dass es sicher ist, um welches es sich handelt. Dazu muss man dieses Teilobjekt zeichnen. D.h. es reicht nicht, nur einen Schwerpunkt ohne das entsprechende Teil zu zeichnen.

7. Zeichnen Sie in die FKD/MBD-Skizzen nur Kräfte, Momente und Vektoren, die das Produkt aus Masse und Bdren Beschleunigung darstellen ($m \cdot a$- und $J \cdot \alpha$ -Vektoren). Bei der oben beschriebenen Vorgehensweise wird die Verbindung zwischen den gezeichneten Diagrammen und den entsprechenden Gleichungen besonders augenfällig.